CALCUL MATRICIEL

Dans tout ce TD, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculer $A+B$, AB et BA.

Exercice 2. Trouver tous les produits matriciels possibles parmi les matrices suivantes et les calculer.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer J^2. En déduire J^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 (Matrice nilpotente, décomposition $D+N$)**.** Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer N^k. En déduire A^k.
2) On considère les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et la relation de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= \phantom{3u_n +{}} 3v_n + w_n \\ w_{n+1} &= + 3w_n \end{cases}$$

   Déterminer les valeurs de u_n, v_n, w_n.

Exercice 5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la puissance k-ième des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 ($\star$)**.** On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = A$. On considère une solution M de cette équation.

1) Montrer que M commute avec A.
2) En déduire que certains coefficients de M sont nuls. Conclure.

Exercice 7. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire A^{-1}.

Exercice 8. Déterminer si les matrices ci-dessous sont inversibles et, lorsque c'est le cas, calculer leur inverse

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2) Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
3) En déduire A^k avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^2 = I_n$. On pose

$$E = \{aI_n + bA \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.

Exercice 11. On pose

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}^* \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Montrer que $(G, \times)$ est un groupe. Est-ce un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$?

Exercice 12. On considère le système de gauche ci-dessous. Un taupin un peu hâtif réalise les opérations suivantes en même temps : $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$; $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$; $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. Il obtient alors le système de droite :

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

Résoudre ce second système. Est-il équivalent au premier ?

Exercice 13. Résoudre les systèmes suivants

$$1) \quad \begin{cases} x = -y + 3 \\ 2x = 3y + 1 \end{cases} \qquad 2) \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + t = -1 \\ z + 2t = 1 \end{cases} \qquad 3) \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ z + t = 3 \\ t + w = 4 \end{cases}$$

Exercice 14. Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ telles que le système suivant soit compatible :

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+4y-3z=-2 \\ -1-3y+4z=m \end{cases}$$

Exercice 15. Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(A,S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = A+S$.

Exercice 16. Soit $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si A et B commutent.

Exercice 17. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $B = A^\top A$.

1) Montrer que B est une matrice symétrique.
2) Montrer que les coefficients diagonaux de B sont positifs.
3) Montrer que si $B=0$, alors $A=0$.

Exercice 18. Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$

1) Calculer $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$.
2) En déduire A^k avec $k \in \mathbb{N}^*$.